29. *Analytic operations* ト *Anulytic operrational equations*]

清 永 辰 次 郎 (阪大)

§1. 空間EトE₁トヲ複素 *Banach* 空間トスル。$\bar{U}_1(x)$、$\bar{U}_2(x)$、……$\bar{U}_n(x)$……ヲ夫々連続ナ一次 二次…n次，…各次オペレーショントシ、$F(x)$ヲ連続ナ解析的オペレーショントスル。$F(x)$ハ一点x_0（ソレハ0ト考ヘテモイヽ）ヲ含ム領域ヲナス集合ニテ定義セラレテヰルトスル。

$y = x + F(x)$ナル形ノ解析的オペレーション方程式ヲ考ヘルタメ$F(x)$ヲ0ノ近傍デ展開スルトキ$F(x) = \bar{U}'(x) + \bar{U}_2(x) + \cdots$ニテ$F(0) = 0$，　$\bar{U}'(x) = \alpha x + \bar{U}_1(x)$，$\alpha$ハ適当ナ複素数キ0，ト書キナホストキ$\bar{U}_1(x)$ガ完全連続トナル如キモノト假定スル。$\alpha$ニテ両辺ヲ除シ書キナホセバ

$$y = x + \bar{U}_1(x) + \bar{U}_2(x) + \cdots + \bar{U}_n(x) + \cdots$$

ノ$y = 0$ニテ$x = 0$ナル解ヲ考ヘル。コレハ$y = 0$ノ近傍ニ於ケル逆オペレーションノ存在ヲ意味シテヰル。

コレハ逐次近似法ヤ優級数法ヤ Kerner, Hildebrandt ノ陰函数存在定理ヤ Leray Schauder ノ不動点定理等デモ論ゼラレルガ Schmidt ノ非線型積分方程式論ノ逐似近似法ニヨル

---

§.2. 先ヅ $U_1(x) \equiv 0$ 即 $y = x + U_2(x) + U_3(x) + \cdots\cdots$ $(= x + F(x)$ ト書ク$)$ ナル場合ヲ考ヘル。

$$U_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{n}{2\pi i}\int_{|\alpha|=r}\frac{F\left(\alpha\frac{x}{\|x\|}\right)}{\alpha^{n+1}}d\alpha$$ ト $F(x)$ ノ連続性トカラ $\|U_n(x)\| \leqq M\|x\|^n$ 充分小ナル δ ニ対シ $\|x - x'\| < \delta$, $\|x\| < \delta$, $\|x'\| < \delta$ ノ充分小ナル処ニテ $\|F(x)\| < M\|x\|^2$ ヒ $\|F(x) - F(x')\| \leqq \|x - x'\|^2 l$

逐似近似法ニヨリ $x = y - F(x)$ ニテ $x_1 = y$; $x_2 = y - F(x_1)$, $\cdots\cdots$ トヲケバ $\|y\| < \delta_1$, ; $\tau = \delta_1 + M\tau^2$ ノ小ナル正根ヲ τ_1 トスルト $\tau_1 < 2\delta_1$, $\|x\| < \delta_1$ ニトレバ $\|x_1\| \leqq \|y\| < \tau_1$ $\|x_2\| \leqq \|y\| + \|F(x_1)\| \leqq \tau_1$, $\cdots\cdots$

倫 $\|x_k - x_{k-1}\| = \|F(x_{k-1}) - F(x_{k-2})\| \leqq l\|x_{k-1} - x_{k-2}\|^2 \leqq q\|x_{k-1} - x_{k-2}\|$, $q < 1$

依ツテ $x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots\cdots + (x_k - x_{k-1})$ ハ絶対収斂シ極限ヲχトスレバ $x = y - F(x)$ ヲ満足スル解ガ存在スル。

解ハ唯一ツデ $\|y\| \to 0$ ナラバ $\|x\| \to 0$, 何者他ニ解 x^* アリトスレバ $\|x^*\| < \delta_2$ ナラバ $l_* 2x_1 \leqq q < 1$, $l_* 2\|x^*\| \leqq q < 1$ ナル如ク $\|y\|$, $\|x^*\|$ ヲエラベルカラ $\|x^* - x_2\| \leqq q\|x^* - x_1\|$, $\|x^* - x_3\| \leqq q^2\|x^* - x_2\|$, $\cdots\cdots$ 依ツテ $x^* = \lim x_k = x$,

次ニ $x = \varepsilon y - F(x)$ ニ於テχハεＹ及 y ノ解析的オペレーションデアル。何者. $\|y\|$ ノ充分小ナル値ニ対シ $q_1 > 1$ ナル q_1 ニ対シ $|\varepsilon| \leqq q_1$ ニテ充分小ナル解χガアル。逐次近似法ヲ $x_1 = \varepsilon y$,

$x_2 = \varepsilon y - F(x_1)$ トシテ繰返ヘセバ x_k ハ $|\varepsilon| < \delta_3$ ニテ ε ノ正則函数ニテ x_k ノ一様収斂ノ極限・xモ亦 ε ノ正則函数ニテ

$$x = \frac{dx}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}^{2} + \frac{d^2x}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon^2 + \cdots\cdots = A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots\cdots$$

$\varepsilon = 1$ トオキ $x = A_1 + A_2 + \cdots\cdots$, $A_1, A_2, \cdots\cdots$ ハ係数比較ニテ得ラレル。即チ $A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots\cdots = \varepsilon y - U_2(A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots) - U_3(A_1\varepsilon + \cdots\cdots) - \cdots\cdots U_k(A_1\varepsilon + \cdots\cdots) - \cdots\cdots$ ヨリ $A_1 = y$ $A_2 = U_2(y), \cdots\cdots$ $\|y\| < \delta_4$ ニテ x ハ y ノ正則函数トナル。

右辺ノ $U_2(A_1\varepsilon + \cdots\cdots)$, $U_3(A_1\varepsilon + \cdots\cdots)$ 等ノ ε ニ関スル $\varepsilon = 0$ ニ於ケル微分係数ハ例ヘバ

$$\frac{U_2(A\varepsilon + \cdots\cdots) - 0}{\varepsilon} \longrightarrow U_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}A + \varepsilon^{\frac{3}{2}}A_2 + \cdots),$$

$$\frac{U_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_1 + \cdots) - 0}{\varepsilon} \longrightarrow U_2(A_1 + \varepsilon A_2 + \cdots\cdots),$$

$$\frac{U_2(A_1 + \varepsilon A_2 + \cdots) - U_2(A_1)}{\varepsilon} \longrightarrow \frac{U(A_1, \varepsilon A_2 + \cdots) + U_2(\varepsilon A_2 + \cdots)}{\varepsilon}$$

$$\rightarrow U(A_1, A_2 + \varepsilon A_3 + \cdots) + U_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_2 + \cdots\cdots),$$

$$\frac{U(A_1, A_2 + \varepsilon A_3 + \cdots) + U_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_2 + \cdots) - U(A_1, A_2)}{\varepsilon}$$

$$\longrightarrow U(A_1, A_3 + \varepsilon A_4 + \cdots\cdots) + U_2(A_2 + \varepsilon A_3 + \cdots\cdots) \cdots\cdots$$

$U_2(A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots\cdots) = W_2\varepsilon^2 + W_3\varepsilon^3 + \cdots\cdots$ ニテ表ハサレル、更ニ高次ノ多項式オペレーションデモ同様デアル。コヽニ

$U_2(X + Y) = U_2(X) + U(X, Y) + U_2(Y)$.

§3. $y = x + U_1(x) + U_2(x) + \cdots\cdots + U_k(x) + \cdots\cdots$ (1) ナル場合

(I) $x + U_1(x) = 0$ ガ $x = 0$ ヨリ外ニ解ナキトキ、即チ 1 ガ固有値デナイトキ $x + U_1(x) = Z$ ハ $Z = 0$ ニテ $x = 0$ ナル唯一ツノ解ガアリ $x = Z - V_1(Z)$、ココニ $V_1(Z)$ ハ完全連続ナ線型オペレーション（*Riesz* ノ定理）

依ツテ $x = y - \sum_{i=2} U_2(x) - V_1(y - \sum_{i=2} U_i(x))$

V_1 ハ連續デ括弧内ハ $\|x\|$ ノ充分小ナル処ニテ一樣收斂ナル故

$V_1U_2,\ V_1U_3,\ \cdots\cdots$ ノ和トナルカラ §2. ノ場合ト全ク同樣ニテ

(1) ニハ $\|y\| < \delta_5$ ナルトキ解ガ存在シ唯一ツニ限ル。

(II) $x + U_1(x) = 0$ ガ $p \geqq 1$ 個ノ線型独立ナル固有解 $x_1 \cdots x_p$ ヲモツ場合

共軛方程式 $X + \overline{U}(X) = 0$ モ p 個ノ線型独立ナル固有解 $X_1, \cdots\cdots X_p$ ヲモツ。

$x + U_1(x) = z$ ガ解ヲモツタメノ必要且充分ナル條件ハ $X_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots p)$ 成立スルコトニテソノトキ $x + U_1(x) = z$ ノ解ハ $x = z - V_1(z) + \alpha_1 x_1 + \cdots\cdots + \alpha_p x_p$ (*Riesz-Schauder* ノ定理) コレハ非斉次方程式ニ二ツノ解ガアレバソノ差ハ斉次方程式ノ解デアルコトカラ出ル,

猶 $x + U_1(x) = y - \sum_{i=2} U_i(x)$ ガ解ヲモツタメノ必要且充分ナル條件ハ

$$X_i(y) - \sum_{j=2}^{\infty} X_i \overline{U}_j(x) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots p.$$

ソノトキ

$$x = y - \sum_{i=2} U_i(x) - V_1(y - \sum_{i=2} U_i(x)) + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j$$

コノ場合モ §2 ノ時ト同樣ニシテ (1) ニハ $\|y\| < \delta_6$ ナルトキ解ガアルコトガワカル。 尚 $x = \varepsilon y - F(x) - V_1(\varepsilon y - F(x)) + \varepsilon \sum \alpha_j x_j$ トオイテ逐次近似法ヲ適用スレバ x ハ ε ニ関シテ正則ニシテ ε ノ巾級数トシテ表ハサレル。ソノ表示式ニ於テ $\varepsilon = 1$ トオキ更ニ $y = \beta y_*$ トヲケバ $\|y_*\|$ ガ充分小ナラバ x ハ $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \cdots\cdots |\alpha_p|$, $|\beta|$ ガ充分小ナラバ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_p$, β ノ巾級数トナリ、係数ハ y_* ノ解析オペレーションデアル。 コノ解ヲ解ノ存在スルタメノ條件ニ代入スレバ

$$P_i(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_p \beta) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots p$$

トナリ $\alpha_1, \cdots \alpha_p\ \beta$ ノ満足スベキ條件トナル。処ガ$\mathfrak{T}$ヲ含ム項ハ $\mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3, \cdots$ デアルカラ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p$ ノ一次ノ項ハ表ハレナイ

$$B_0^{(i)}\beta + B_{00}^{(i)}\beta^2 + B_{01}^{(i)}\beta\alpha_1 + \cdots + B_{0p}^{(i)}\beta\alpha_p + B_{11}^{(i)}\alpha_1^2 + \cdots$$
$$+ B_{pp}^{(i)}\alpha_p^2 + B_{12}^{(i)}\alpha_1\alpha_2 + \cdots + B_{p-1\,p}^{(i)}\alpha_{p-1}\alpha_p + \cdots = 0$$
$$(i=1,2,\cdots p):$$

BハУ$_*$ノ沢函数デアルカラBノ値ハ複素数デコレラノ関係式カラ $\beta, \alpha_1 \cdots \alpha_p$ ガ定メラレル。特ニ $p=1$ ノ場合ニハ Schmidt ノ得タ様ニシテ $B_0 \neq 0$ $B_{11} \neq 0$ ナラバ α ニハ二根アリ、ソレヲ解ニ代入スレバ解ガ二ツアルコトガワカル。$B_0 \neq 0$, $B_{11} = B_{111} = \cdots = 0$ ニテ α^q ガ最初ニ係数ガ零ナラヌモノトスレバ解ハq個出ル。又例ヘバ $B_0 \neq 0$, $B_{11} = B_{111} = \cdots = 0$ ナラバ β 共ニ零ニナル解ナク, $B_0 = \cdots\cdots$ 総ク $= 0$ ナラバ α ニ従属スル無限ニ多クノ解ガアル。　　（ツヅク）

（1947. 2. 6 受付）